page 150 1/4 - 1992.

CONCOURS MINES PONTS P' Math 2

ECOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSEES,
ECOLES NATIONALES SUPERIEURES DE L'AERONAUTIQUE ET DE L'ESPACE,
DE TECHNIQUES AVANCEES, DES TELECOMMUNICATIONS,
DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ETIENNE, DES MINES DE NANCY,
DES TELECOMMUNICATIONS DE BRETAGNE,
ECOLE POLYTECHNIQUE
(Option T.A.)

CONCOURS D'ADMISSION 1992

MATHEMATIQUES

DEUXIEME EPREUVE
OPTION P'
(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie : MATHEMATIQUES II - P'.

L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats de l'option P', comporte 4 pages.

NOTATIONS

- C est le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions réelles définies sur $\mathbb{R}$ continues et 2π-périodiques. Ces fonctions sont toutes bornées. La norme d'une fonction f de C est définie par :
$$\|f\| = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)| .$$

- C_n est, pour un entier naturel n ($\in \mathbb{N}$) donné, le sous-espace vectoriel de C des polynômes trigonométriques P qui s'écrivent :
$$P(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) .$$

- $d_n(f)$ désigne, pour un entier naturel n et une fonction f de C donnés, l'expression :
$$d_n(f) = \inf \{\|f - P\| \mid P \in C_n\} .$$

- $\mathcal{L}_\alpha$: Soit $\alpha \in]0, 1[$; la fonction f de C a la propriété $\mathcal{L}_\alpha$ si et seulement s'il existe une constante K telle que pour tous réels x et y :
$$|f(x) - f(y)| \leqslant K |x - y|^\alpha .$$

PARTIE I

Quelques propriétés des polynômes trigonométriques

1°) a) Soit n un entier naturel donné ; démontrer qu'il y a une correspondance bijective entre les suites finies de nombres complexes c_k, $k = -n, \ldots, 0, \ldots, n$ tels que pour tout k, $\overline{c_k} = c_{-k}$ et les polynômes trigonométriques de C_n exprimée par la relation :
$$P(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx} .$$

b) En déduire que pour toute suite finie (x_j) $j = 0, 1, \ldots, 2n$ de $2n+1$ réels, deux à deux distincts, de l'intervalle $[0, 2\pi[$ et pour toute suite (y_j) $j = 0, 1, \ldots, 2n$ de $2n+1$ réels, il existe un unique polynôme P de C_n tel que pour tout entier j variant de 0 à 2n : $P(x_j) = y_j$.

TOURNEZ S'IL VOUS PLAIT

2°) a) Soit $f \in C$; démontrer qu'il existe un réel a tel que $\|f\| = |f(a)|$.

b) Soit P un polynôme trigonométrique appartenant à C_n $(n \geqslant 1)$ supposé vérifier les relations :

$$(\mathcal{P}) \qquad \|P\| = 1 \ , \ \|P'\| = P'(0) \ \text{ et } \ \|P'\| > n \ .$$

Soit S le polynôme trigonométrique défini sur $\mathbb{R}$ par la relation :

$$S(x) = \frac{\|P'\|}{n} \sin(nx) - P(x) \ .$$

Calculer $S'(0)$ et $S''(0)$.

Etablir que le polynôme trigonométrique S admet au moins 2n zéros appartenant à l'intervalle $[0, 2\pi[$.

Démontrer que la dérivée S' admet au moins 2n zéros dans $[0, 2\pi[$.

En déduire que S" admet 2n+1 zéros dans ce même intervalle $[0, 2\pi[$.
Existe-t-il des polynômes P de C_n $(n \geqslant 1)$ vérifiant ces relations $(\mathcal{P})$?

3°) Démontrer que pour tout polynôme trigonométrique P de C_n $(n \geqslant 0)$, la dérivée P' vérifie :

$$\|P'\| \leqslant n \|P\| \ .$$

PARTIE II

L'objet de cette partie est l'étude de la suite de terme général $d_n(f)$, $n = 0,1,2,\ldots$ définie pour une fonction f de C donnée.

1°) a) Démontrer que pour $n \in \mathbb{N}$ et $f \in C$ donnés, le réel $d_n(f)$ est bien défini.

b) Démontrer que la suite de terme général $d_n(f)$, $n = 0,1,2,\ldots$, pour f donnée, est décroissante.

2°) a) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, et tout x réel différent de $2k\pi$, démontrer les relations :

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kx = \frac{\sin\left((2n+1)\frac{x}{2}\right)}{2 \sin\frac{x}{2}}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \sin\left((2k-1)\frac{x}{2}\right) = \frac{\sin^2\left(n\frac{x}{2}\right)}{\sin\frac{x}{2}} \ .$$

Est-ce que ces relations se prolongent par continuité à $\mathbb{R}$ en entier ?

b) Soient J_n et $K_n(f)$ les fonctions de C définies par les relations ($n \in \mathbb{N}^*$) :

$$J_n(0) = n^2 \quad ; \quad \text{pour } x \in]0,\ 2\pi[\quad , \quad J_n(x) = \frac{\sin^2\left(n\,\frac{x}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)} \quad ,$$

et pour tout x de $\mathbb{R}$: $K_n(f)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\, J_n(t)\, dt$, f étant toujours une fonction de C .

Démontrer que J_n et $K_n(f)$ sont des polynômes trigonométriques de C_{n-1} ;

établir et utiliser le résultat : $K_n(f)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(u)\, J_n(u-x)\, du$.

3°) Soient u_n et v les intégrales : $u_n = \int_{-\pi}^{\pi} J_n(x)\, dx$, $v = \int_0^{\infty} \frac{\sin^2 u}{u^2}\, du$.

a) Etablir que l'intégrale v est convergente.

b) Etablir l'encadrement $\frac{2u}{\pi} \leqslant \sin u \leqslant u$ pour u appartenant à $\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$.

c) Déterminer deux réels A et B strictement positifs tels que l'encadrement $nA \leqslant u_n \leqslant nvB$ ait lieu pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$.

4°) Dans cette question la fonction f de C a la propriété $\mathcal{L}_\alpha$; démontrer en majorant la norme de la fonction $f - \frac{1}{u_n} K_n(f)$, que la suite de terme général $n^\alpha\, d_n(f)$, $n = 1,2,..$ est bornée.

5°) Choisissons comme fonction f la fonction de C définie sur $[-\pi, \pi]$ par $f(x) = |x|$.

a) Déterminer le développement en série de Fourier de la fonction f ; justifier la convergence de la série et l'égalité : $f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx)$.

En déduire les sommes des deux séries : $S_1 = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}$, $S_2 = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^4}$.

b) Soit g_n la fonction : $g_n(x) = f(x) - a_0 - \sum_{p=1}^{2n} a_p \cos(px)$.

Etablir l'inégalité pour $n \in \mathbb{N}^*$: $\sum_{p=n}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} \leqslant \frac{1}{2(2n-1)}$.

Donner un majorant de $\|g_n\|$ et en déduire que la suite de terme général $d_n(f)$ vérifie l'inégalité $n d_n(f) \leqslant D$ (D constante).

Pour quelles valeurs de α appartenant à $]0,1[$, la fonction f possède-t-elle la propriété $\mathcal{L}_\alpha$?

TOURNEZ S'IL VOUS PLAIT

PARTIE III

Soit f une fonction donnée de C ; il sera supposé qu'il existe une suite de polynômes trigonométriques P_n, $n = 0,1,2,$ tels que pour tout entier n :

$$\|P_n - f\| = d_n(f) .$$

1°) Démontrer, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, les inégalités :

$$\left|P'_n - P'_{2n}\right| \leqslant 4n\, d_n(f)$$

$$\left|P'_1 - P'_0\right| \leqslant 2\, d_0(f) .$$

2°) Démontrer, pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, l'inégalité :

$$\left|P'_{2^k} - P'_1\right| \leqslant 4 \sum_{p=0}^{k-1} 2^p\, d_{2^p}(f) .$$

En déduire : $\left|P'_{2^k}\right| \leqslant 8 \sum_{p=0}^{2^{k-1}} d_p(f)$.

3°) Déduire des résultats précédents que pour tout entier k ($k \geqslant 1$) et tous réels x et y :

$$|f(x) - f(y)| \leqslant 2d_{2^k}(f) + 8\,|x - y| \sum_{p=0}^{2^{k-1}} d_p(f) .$$

4°) Soit α un réel donné, $\alpha \in]0, 1[$.

Le but de la question est de démontrer que si la suite de terme général $n^\alpha\, d_n(f)$, $n = 1,2,...$ est bornée, la fonction f a la propriété $\mathcal{L}_\alpha$.

a) Soit (w_n) $n = 1,2,...$ la suite définie par : $w_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p^\alpha}$.

Donner un infiniment grand équivalent à w_n .

b) Soient x et y deux réels distincts ; démontrer que, lorsque $|x - y|$ est inférieur à 1, il existe un entier unique N tel que :

$$\frac{1}{2^{N+1}} < |x - y| \leqslant \frac{1}{2^N} .$$

c) Démontrer à partir des résultats précédents que si la suite de terme général $n^\alpha\, d_n(f)$, $n = 1,2,...$ est bornée (majorée par M), la fonction f a la propriété $\mathcal{L}_\alpha$.

FIN DU PROBLEME